Διαφ. Εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{lll} (\epsilon')\ \ y' = f(x,y) & , & x \in I \\ (c)\ \ y(x_0) = y_0 & & x_0 \in I \end{array}\right\}$$ το πρόβλημα που εξετάζουμε για την ύπαρξη λύσεων.

Lipschitz: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|$

- $R := \{(x,y) : |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\} \subseteq D_f$

  $\frac{\partial f}{\partial y}$: συνεχής στο $R \to f$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο R

- $S := \{(x,y) : |x-x_0| \leq a,\ y : \text{αυθαίρετο}\} \subseteq D_f$

  $\frac{\partial f}{\partial y}$: συνεχής, φραγμένη στο $S \to f$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο S

ΑΣΚΗΣΗ

$g(x,y) = x^2|y|$, $R := \{(x,y) : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ → κλειστό κ' φραγμένο, άρα συμπαγές

Λύση

Για $x \in [-1,1]$, $y_1, y_2 \in [-1,1]$ έχουμε:
$$\begin{aligned} |g(x,y_1) - g(x,y_2)| &= \left|x^2|y_1| - x^2|y_2|\right| \\ &= x^2\left||y_1| - |y_2|\right| \\ &\leq 1\left||y_1| - |y_2|\right| \\ &= 1\left||y_1| - |y_2|\right| \\ &\leq 1\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ

$g(x,y) = e^x y^2 + \log x \cdot y + x^3$ $\qquad R := \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2 \quad 1 \leq y \leq 4\}$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \underbrace{\left|2ye^x + \log x\right|}_{\text{συνεχής στο } R \text{, άρα έχει ελάχιστο και μέγιστο}} \leq 2ye^x + \log x \leq 2\cdot 4 e^2 + \log 2 = k$$

(Αν ισχύει η συνθήκη Lipschitz για κάποιο k, τότε ισχύει και για $k_1 > k$, $k_1 \in \mathbb{R}$)

ΑΣΚΗΣΗ

$$g(x,y) = \begin{cases} y(3x-1), & x \geq 0 \\ y(2x-1), & x<0 \end{cases} \qquad S := \{(x,y) : |x| \leq 1 \ , \ y: \text{αυθαίρετο}\}$$

Λύση

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \overset{x\geq 0}{=} |y_1(3x-1) - y_2(3x-1)| = |3x-1|\,|y_1-y_2|$$
$$\leq (3|x|+1)\,|y_1-y_2|$$
$$\leq 4\,|y_1-y_2|$$

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \overset{x<0}{=} |y_1(2x-1) - y_2(2x-1)| = |2x-1|\,|y_1-y_2|$$
$$\leq (2|x|+1)\,|y_1-y_2|$$
$$\leq 3\,|y_1-y_2|$$

$$3|y_1-y_2| \leq \boxed{4|y_1-y_2|}$$

ισχύει η συνθήκη Lipschitz

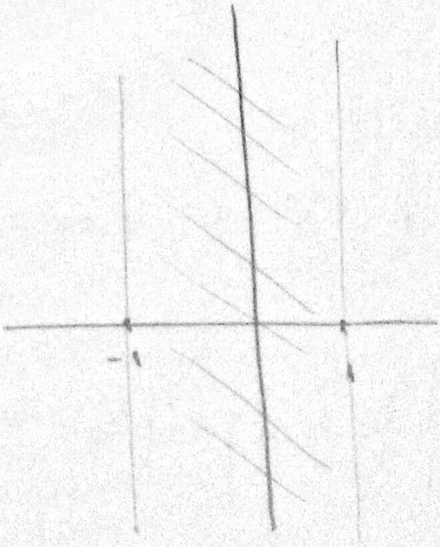
ΑΣΚΗΣΗ

$$g(x,y) = xy^2 \qquad S := \{ |x| \leq 1 \ , \ y: \text{αυθαίρετο}\}$$

$$R: \{ |x| \leq 1 \ , \ |y| \leq 5\}$$

Λύση

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = |2xy| \overset{R}{\leq} 10$$



Θα αποδείξω ότι δεν ισχύει ο ορισμός στο S

- Υποθέτω ότι η g ικανοποιεί τη Lipschitz στο S με συνθήκη $k>0$ δηλ. ότι

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \leq k|y_1-y_2| \qquad \forall y_1,y_2 \in \mathbb{R}$$

$$|xy_1^2 - xy_2^2| \leq k|y_1-y_2|$$

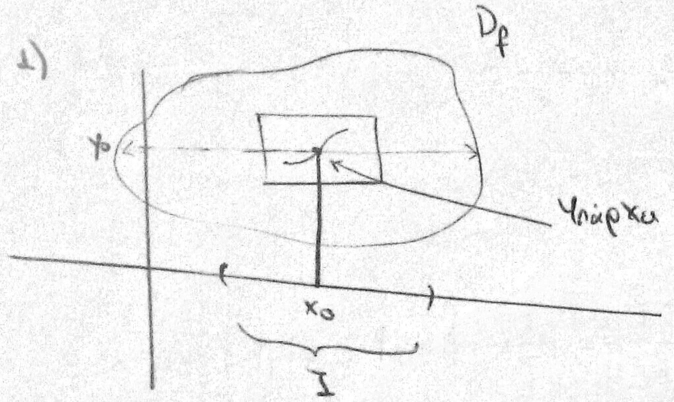
$$|x|\,|y_1+y_2| \leq k \quad , \ \forall \ y_1,y_2 \in \mathbb{R} \ , \ |x| \leq 1$$

Όμως για $x=1$, $y_1 = \kappa$, $y_2 = -\kappa$ είναι: $1 \cdot |2\kappa| \leq \kappa \Rightarrow 2 < 1$ άτοπο

Άρα δεν ισχύει η συνθήκη Lipschitz στο S

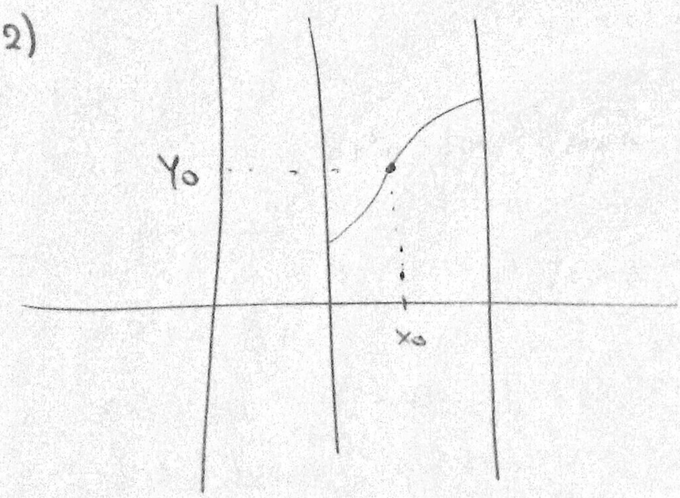
---

1)



Υπάρχει ακριβώς μια λύση που να περνάει απ' αυτό το σημείο

2)



ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Ας είναι $a, b > 0$ και $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής και κ-Lipschitz στο σύνολο

$S' := \{ (x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \} \subseteq D_f$.

Θέτουμε $M = \max\limits_{R} |f(x,y)|$ και $r = \min\{a, b/M\}$ (αν $M=0$, $r=a$ τετριμμένη περίπτωση)

Τότε το Π.Α.Τ (E)-(c) έχει ακριβώς μια λύση y, στο $[x_0 - r, x_0 + r] = I$

Η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας $\varphi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{\nu-1}(s))\, ds$, $\varphi_0(x) = y_0$

και $|\varphi_\nu(x) - y(x)| \leq \frac{M}{\kappa} \frac{(\kappa r)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{\kappa r}$, $x \in I$, $\nu = 1, \ldots$

Παράδειγμα

$y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$

Υπάρχει λύση στο $(0,0)$; είναι μονοσήμαντη ;

Λύση

Αν είναι $a, b > 0$, $R = \{ (x,y) : |x| \le a, \ |y| \le b \}$

Είναι $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Η f έχει μερική παράγωγο ως προς y και $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = |2y| = 2|y| \le 2b \rightsquigarrow$

Η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz $\kappa = 2b$

Για $(x,y) \in R$ έχουμε: $|f(x,y)| = x^2 + y^2$ και $\max\limits_{R} |f(x,y)| = a^2 + b^2$

$r = \min\{ a, b/M \} = \min \left\{ a , \frac{b}{a^2+b^2} \right\} > 0$, $I = [-r, r]$

Θ.1 $\rightsquigarrow$ Το π.α.τ. έχει ακριβώς μια λύση στο I

(Αν θέλουμε να βρούμε τη μεγαλύτερη τιμή του r , τότε :

$$\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2a} \frac{2ab}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2a}$$, $\left\{ a , \frac{1}{2a} \right\} \rightsquigarrow$ η μέγιστη τιμή

είναι όταν :

$a = \frac{1}{2a} \rightsquigarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Παράδειγμα 3 (Βιβλίου)

$y' = x + y^2$, $y(0) = 0$

Νδο έχει ακριβώς μια λύση στο $[-1/2, 1/2]$

Λύση

Θεωρώ $R := \{(x,y) : |x| \le 1/2,\ |y| \le b\}$, $b > 0$

$f(x,y) = x + y^2$, συνεχής

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = 2|y| \le 2b$ Συνθήκη Lipschitz

$M = \max_R |f(x,y)| = \max_R |x + y^2| = \frac{1}{2} + b^2$

$r = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{b}{\frac{1}{2} + b^2}\right\}$

$\frac{1}{2} \le \frac{b}{\frac{1}{2} + b^2}$

$\frac{1}{2} + b^2 \le 2b$

$b^2 - 2b + \frac{1}{2} \le 0$

$2b^2 - 4b + 1 \le 0$

$b_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Για $b = 1$.

Να βρεθεί μια προσέγγιση της λύσης

$|y(x) - \varphi_v(x)| \le \frac{16 - 7\sqrt{2}}{24} e^{(2+\sqrt{2})/2}$, $x \in I_v$

Υπάρχει στο Βιβλίο.

Παράδειγμα 4

$y' = e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}$, $y(0)=1$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|e^{-y^2}(-2y)\right| = 2\,\frac{|y|}{e^{y^2}} = 2\,\frac{|y|}{e^{|y|^2}} \le k \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Ο παρονομαστής αυξάνει γρηγορότερα από τον αριθμητή

$\rightsquigarrow$ f k-Lipschitz στο S